Groupe symétrique

I Généralités

Lorsque X est un ensemble, on note $S(X)$ le groupe de permutations de X pour la loi $\circ$.

Prop: Si X et Y sont équipotents, $S(X) \simeq S(Y)$

D/ Soit $f : X \to Y$ une bijection, et soit $\varphi : S(X) \to S(Y)$
$$\sigma \mapsto f \circ \sigma \circ f^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varphi(\sigma)"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$\varphi(\sigma)(y) = f(\sigma(f^{-1}(y)))$$

$$\varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2) = f \circ \sigma_1 \circ f^{-1} \circ f \circ \sigma_2 \circ f^{-1}$$
$$= \varphi(\sigma_1) \circ \varphi(\sigma_2)$$

enfin φ^{-1} est $\sigma' \mapsto f^{-1} \circ \sigma' \circ f$

On s'intéresse désormais au cas où X est fini. $X = \emptyset$ $S(\emptyset) \simeq \{Id\}$

$$|X| = n \Rightarrow S(X) \simeq S([\![1,n]\!]) = S_n$$

Cayley **Th:** Si G est un groupe de cardinal n, G est isomorphe à un ssg de S_n

$\gamma_a(x) = ax$ D/ $\varphi \begin{pmatrix} G \to S(G) \\ a \to \gamma_a \end{pmatrix}$ | $\forall (a,b) \in G^2$, $\gamma_a \circ \gamma_b = \gamma_{ab}$; $\varphi(\gamma_a) = Id_G \Leftrightarrow \forall_{x \in G}\ ax = x \Longleftrightarrow a = e$

Donc φ est un morphisme injectif

II Générateurs :

A) Transpositions :

Th : Soit $\sigma \in S_n$. Il existe alors $r \leq n$ et des transpositions $\tau_1, \dots \tau_r$ tq $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$

D/ Récurrence sur n ($n=1$, $r=0$) on suppose $n \geq 2$. Soit $\sigma \in S_n$

1er cas : $\sigma(n) = n$. Alors σ induit une bijection de $[\![1, n-1]\!]$

Soit σ'. On écrit $\sigma' = \tau_1' \circ \dots \circ \tau_r'$ $r \leq n-1$
on prolonge τ_i' et τ_i avec $\tau_i(n) = n$

2e cas : $\sigma(n) \neq n$. Soit $\tau = (\sigma(n), n)$ il vient $\tau \circ \sigma(n) = n$

1er cas : $\tau \circ \sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$ $r \leq n-1$ $\underbrace{(\tau \circ \tau)}_{Id} \circ \sigma = \tau \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$

formellement : Toronto c'est une ville plus terrible

Ex : Soit H un sg de S_n contenant une transposition
si H est distingué, $H = S_n$

S/ Soit $(i, j) \in H$. Soit $k, \ell \in [\![1, n]\!]$ $k \neq \ell$: il existe $\sigma \in S_n$
tq $\sigma(i) = k$, $\sigma(j) = \ell$: $\tau = \sigma \circ (i\,j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i)\,\sigma(j))$

$\tau(k) = \sigma(j) = \ell$, $\tau(\ell) = k$, si $m \notin \{k, \ell\}$, $\sigma^{-1}(m) \notin \{i, j\}$

donc $\tau(m) = m$ Bref $\tau = (k, \ell)$

(CC) H contient toutes les transpo donc H contient S_n : $H = S_n$

3) Cycles :

$\sigma = (i_1, \dots, i_m)$: $\sigma^m = Id$, $\sigma^k \neq Id$, $k = 0 \dots m-1$; $\omega(\sigma) = m$

<u>Voc</u> : $\underbrace{(i_1, \dots, i_m)}_{C_1}$ et $\underbrace{(j_1, \dots, j_n)}_{C_2}$ sont à support disjoint lorsque

$$\{i_1, \dots, i_m\} \cap \{j_1, \dots, j_n\} = \emptyset$$

Dans ce cas $C_1 \circ C_2 = C_2 \circ C_1$ $\left(\forall \alpha \; (C_1 \circ C_2)^\alpha = C_1^\alpha \circ C_2^\alpha\right)$

$$\omega(C_1 \circ C_2) = ppcm(m, n)$$

En effet : C_1^α et C_2^α sont aussi à supports disjoints

$$C_1^\alpha \circ C_2^\alpha = Id \iff C_1^\alpha = Id \text{ et } C_2^\alpha = Id \iff m \mid \alpha \wedge n \mid \alpha$$
$$\iff m \vee n \mid \alpha$$

⚠ En général C_1^d n'est pas un cycle si $d \geq 2$

si $1 < d < m$ et $d \mid m$ $\quad C_1^d = (i_1, i_{d+1}, i_{2d+1}, \dots, i_{(m-1)d+1})$

$$\circ (i_2, i_{d+2}, \dots).$$

<u>Th</u> : Soit $\sigma \in S_m$, il existe des cycles $c_1, \dots, c_r$ à supports disjoints tq $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_r$, ils sont uniques à permutation près

D/ <u>Orbites</u> :

on définit la relation $\sim$ sur $[1, m]^2$ par $i \sim j \iff \exists k \in \mathbb{Z}$
$j = \sigma^k(i)$

$\sim$ est une relation d'équivalence et une orbite est une classe selon σ. Ex : pts fixes

$[1, m]$ est donc une réunion disjointe d'orbites selon σ

I est stable par σ, donc $\sigma|_I$ injective et par suite bijective

Notons $\Gamma = \{\sigma^k(a)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Si $N = \omega(\sigma)$, il vient $\sigma^N(a) = a$

il existe un plus petit $m \geq 1$ tq $\sigma^m(a) = a$

$k \in \mathbb{Z}$ $k = qm + r$ $\quad k = qm + r \quad \sigma^k(a) = \sigma^r(\sigma^{qm}(a)) = \sigma^r(a)$

$0 \leq k < \ell \leq m-1 \quad \sigma^\ell(a) = \sigma^k(a) \Rightarrow \sigma^{\ell-k}(a) = a$ avec $0 < \ell - k < m$

bij

Bilan partiel on note $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ les orbites non triviales.

et $C_i = \sigma|_{\Gamma_i}^{\Gamma_i}$ $i = 1 \dots r$

Alors $\sigma = C_1 \circ \dots \circ C_r$ en regardant l'action sur l'orbite

de $a \in [\![1, n]\!]$

Unicité si $\sigma = C'_1 \circ \dots \circ C'_s$ $\left|\begin{array}{l} \text{si } a \in \bigcup_{i=1}^{s} \text{supp}(C'_i) \quad \sigma(a) = a \\ a \in \text{supp}(C'_i) \quad C'_i = (a, x_2, \dots, x_\ell) \end{array}\right.$

il vient $C'_j(a) = a$ pour $j \neq i$ (supp disjoints !)

$\sigma^k(a) = C'^k_i(a) \quad \{\sigma^k(a)\} = \text{supp}(C'_i)$ ETC

Calcul de l'ordre $\sigma^m = id \Leftrightarrow \forall i \; C_i^m = Id \Leftrightarrow \forall i \; \ell(C_i) \mid m$

$$\omega(\sigma) = \text{PPCM}(\ell(C_1), \dots, \ell(C_r))$$

III Signature

Obs Soit $\sigma \in S_n$ $\mathbb{P} = \{\{i, j\} \mid i \neq j\}$

alors $\varphi_\sigma \left(\begin{array}{l} \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \\ \{i, j\} \longrightarrow \{\sigma(i), \sigma(j)\} \end{array}\right)$ est bijective

De là $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \in \{-1, 1\}$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ où $I(\sigma) = \{\{i, j\} \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}$

Prop: $\varepsilon \begin{pmatrix} S_n \to \{-1,1\} \\ \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma) \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}(S_n, \mathbb{C}^*)$

$$\varepsilon(\sigma \circ \rho \circ \sigma) = \prod_{i<j} \left(\frac{\rho(\sigma(j)) - \rho(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \right) \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$$

$$= \varepsilon(\rho)\varepsilon(\sigma)$$

Obs: $\forall (\sigma, \rho) \in S_n \quad \varepsilon(\rho^{-1} \circ \sigma \circ \rho) = \varepsilon(\rho)^{-1} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\rho)$

Prop: 1) Deux cycles de même longueur ont la même signature
2) Si C est de longueur m, $\varepsilon(C) = (-1)^{m-2}$

D/ 1) $C = (i_1, \dots, i_m)$ | on pose $\rho(i_k) = j_k$, $k = 1, \dots, m$
$C' = (j_1, \dots, j_m)$ | ρ bijection $[\![1,n]\!] \setminus \{i_1, \dots, i_m\} \to [\![1,n]\!] \setminus \{j_1, \dots, j_m\}$

choix unique
$m < m-2$ + choix

il vient $\rho \circ (i_1, \dots, i_m) \circ \rho^{-1} = (j_1, \dots, j_m)$ (vérifiez)

2) τ transposition, elle est conjuguée à $(1\ 2)$

$\varepsilon((1,2)) = (-1)^{I((1,2))} = -1$ | $2 \leq i < j$ pas d'inversion
| $i = 1 < 2 < j$

$C = (1\ 2 \dots m)$ on a $C = (1\ 2)(2\ 3) \dots (m-1, m)$

$$\varepsilon(C) = (-1)^{m-1}$$

Calcul (1) $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_2 \quad \varepsilon(\sigma) = (-1)^{c}$

$\sigma = c_1 \circ \dots c_r$ supp 2 à 2 disjoints

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(c_1)-1} \dots (-1)^{\ell(c_r)-1} = (-1)^{\ell(c_1)+\dots+\ell(c_r)-r}$

$= (-1)^{n-\mathcal{O}(\sigma)}$

En effet σ possède $n - (\ell(c_1) + \dots + \ell(c_r)) = S$ points fixes

$n - \mathcal{O}(\sigma) = n - (r+S) = (n-S) - r = \ell(c_1) + \dots + \ell(c_r) - r$

l'unicité de la signature en résulte

Plus directement si $\varphi \in \mathrm{Hom}(S_n, \mathbb{C}^*)$ $\varphi(\tau^2) = \varphi(Id) = 1$

$\varphi(\tau) \in \{-1, 1\}$

si $\varphi(\tau) = 1$, $\varphi = Id$ $\left(\forall \tau \in S_n \ \varphi(\tau) = 1 \ \ldots \ \rho \circ \tau \circ \rho^{-1}\right)$

sinon $\varphi = \varepsilon$.

Groupe alterné

Ex (I) cycles d'ordre impair

Prop : • A est un sg distingué de S_n

• $\mathrm{card}(A_n) \underset{n \geq 2}{=} \frac{1}{2} n!$

En effet : $\begin{pmatrix} A_n \longrightarrow S_n \setminus A_n \\ \sigma \longmapsto (1,2)\sigma \end{pmatrix}$ est bijective si $\rho \in S_n \setminus A_n$

$\varepsilon(\rho) = -1$

$\varepsilon((1,2)\rho) = 1$

et alors $(1,2)\sigma = \rho$

Description de A_n $n=2$: $\{Id\}$; $n=3$ $\{I, (123), (132)\}$

$n=4$ 3 cycle $\{I, (12)(34), (13)(42), (14)(23)\}$

sg distingué de A_4